**Билет ???**

**1) Интеграл Римана**

Число I называется *интегралом Римана* от функции f на отрезке [*a;b*], если для любого числа *ε* > 0 такое, что для любого разбиения (*τ, ξ*) с отмеченными точками отрезка [*a;b*], мелкости разбиения d(*τ*)<δ имеет место неравенство

Интеграл от функции f по отрезку [*a;b*] обозначают символом и пишут

Числа a, b называют, соответственно, верхним и нижним пределами интегрирования. Сама функция, если для неё существует интеграл Римана, называется интегрируемой по Риману.

Обозначим [*a;b*] множество функций, интегрируемых на отрезке [*a;b*].

**Необходимое условие интегрируемости**

Для того, чтобы функция *f*, определенная на отрезке [*a*; *b*], была интегрируема по Риману на отрезке [*a*; *b*], необходимо, чтобы она была ограничена на этом отрезке. Итак, если , то *f* ограничена на [*a*; *b*].

**Достаточное условие интегрируемости**

Для того, чтобы ограниченная на отрезке [*a*; *b*] функция f была интегрируема на нём, достаточно, чтобы:

**2) как метрическое пространство**

На множестве упорядоченных наборов из *n* действительных чисел Определим функцию . Тогда представляет собой метрическое пространство.

**Полнота**

Лемма. Пространство является полным

**Билет 4**

**1) Свойства интеграла Римана**

**1)**

**2)** Линейность: Если , то и

**3)** Если и , тогда

**4)** Пусть Тогда и

**5)** Если то и

**6)** Если и то

**7)** Пусть

**2) Свойства непрерывных функций на компакте**

**Теорема Вейерштрасса**: Функция, непрерывная на компакте, ограничена на нём и достигает на нём своих меньших и наибольших значений.

**Теорема Кантора**: Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нём.

**Билет 6**

**1) Теорема о среднем**

Пусть сохраняет значение на (то есть или на [*a*; *b*]). Тогда

Если , то

**Следствие из теоремы Больцано-Коши:**

. Если

**2) Критерий коши существования предела функции**

Пуста *а* – предельная точка множества *Х*. Функция имеет предел при тогда и только тогда, когда ()

**Билет 8**

**1) Интеграл с переменным верхним пределом**

Пусть если , то определена функция . Функция *F* называется *интегралом с переменным верхним пределом* (ИсПВП).

**Непрерывность ИсПВП:** Если , то ;

**Дифференцируемость ИсПВП:** Если f непрерывна в , то *f* дифференцируема в и .

**Замечание**: Если дифференцируема на и – первообразная на

**2) Теорема о производной сложной функции**

Пусть функция , . Если *f* дифференцируема в точке *p*, *g* дифференцируема в точке *q*, то дифференцируема в *p* и

*Матрица производной отображения* имеет вид: (*Матрица Якоби*)

**Билет 10**

**1) Формула Ньютона-Лейбница**

Пусть и . Тогда

**Интеграл с переменным верхним пределом**

Пусть если , то определена функция . Функция *F* называется *интегралом с переменным верхним пределом* (ИсПВП).

**2) Теорема о неявной функции**

Пусть и .

Пусть

Тогда .

Более того, если , то

Функция называется *функцией, заданной неявно* уравнением

**Билет 11**

**1) Интегрируемость непрерывных и монотонных функций**

**Теорема**: Если , то , где – множество непрерывных функций на

**Теорема**: Если *f* – монотонная на , то

**2) Дифференцируемость отображения в точке**

Пусть . Функция *f* называется *дифференцируемой в точке* p, если существует линейный оператор:

называется производной *f* в точке *p* и обозначается .

**Единственность производной**

Если отображение дифференцируемо в точке , то его производная в точке *p* единственная.

**Необходимое условие дифференцирования**

Если *f* дифференцируема в точке *p*, то *f* непрерывна в точке *p*.

**Билет 12**

**1) Необходимое условие дифференцируемости функции в точке**

Если функция дифференцируема в точке , то она имеет в точке все частные производные

**Достаточное условие дифференцируемости функции в точке**

Если все частные производные , определены в окрестности точки и непрерывны в точке , то функция дифференцируема в точке .

**2) Несобственный интеграл**

Пусть

Несобственным интегралом от функции называется следующий предел:.

Если предел конечен, то интеграл сходящийся, в противном случае – несходящийся.

**Признак Абеля**

Пусть дан несобственный интеграл и непрерывна на сходится, непрерывно дифференцируема на , монотонна и ограниченна. Тогда – сходится.

**Билет 13**

**1) Производная по направлению**

Пусть

Уравнение прямой проходит через с направленным вектором .

Пусть *M*

**Градиент**

Если предел , то он называется произвольной функции *f* в точке *M* по направлению вектора и обозначается

Рассмотрим вектор:

**Геометрический смысл градиента**: градиент показывает направление, в котором скорость возрастания функции наибольшая.

**2) Абсолютная и условная сходимость**

Пусть дан несобственный интеграл . Если интеграл , то называется абсолютно сходящимся.

Если расходится, а сходится, то – условно сходящийся.

**Дополнительно) Несобственный интеграл от неотрицательной функции**

Пусть Интеграл сходится ТиТТ,К :

**Признаки сходимости/сравнения**

1. Пусть .

Тогда, если сходится (расходится),то тоже сходится (расходится)

2. Пусть .

1) Если , то из сходимости следует сходимость

2) Если , то из расходимости следует расходимость

**Билет 1**

**1) Производная по направлению**

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на некотором промежутке, если на этом промежутке функция F дифференцируема и выполняется равенство F’(x)=f(x).

**Теорема первообразных**

Если функции и являются первообразными функции на одном и том же промежутке, то их разность постоянна на этом промежутке.

**Неопределенный интеграл**

Совокупность всех первообразных функций для данной функции на промежутке *Х* называется неопределенным интегралом от функции (на этом промежутке) и обозначается символом

**Замена переменной**

Если на некотором промежутке выполняется , а непрерывно дифференцируемое отображение промежутка в , то

**Интегрирование по частям**

Пусть функции и дифференцируемы на промежутке *X* и на этом промежутке для функции существует первообразная. Тогда на данном промежутке для функции существует первообразная и справедлива формула:

**2) Теорема Больцано-Вейерштрасса**

Пусть – линейно свободное множество и – непрерывная функция. Если , то для числя а лежащего между

**Билет ???**

**2) Норма в линейном пространстве**

Пусть *E* – конечное линейное пространство. *Нормой* на *Е* называется функция , удовлетворяющая условиям (аксиомам нормы)

1.

2., ,

3.

Линейное пространство (ЛП), на котором введена норма – нормированное ЛП.

**Ограниченность линейного оператора в конечномерных линейных нормированных пространствах**

Пусть *E* и *F* – конечномерное нормированное линейное пространство с нормами и . Если – линейный оператор, то .